TITLE:

Estimated Stochastic Linear Programming(Mathematical Programming and its Related Field)

AUTHOR(S):

森田, 浩; 石井, 博昭; 西田, 俊夫

CITATION:

森田, 浩 ...[et al]. Estimated Stochastic Linear Programming(Mathematical Programming and its Related Field). 数理解析研究所講究録 1989, 680: 164-173

ISSUE DATE:

1989-02

URL:

http://hdl.handle.net/2433/101102

RIGHT:

京都大学学術情報リポジトリ KURENAI 紅
Kyoto University Research Information Repository

数理解析研究所講究録
680巻 1989年 164-173

Estimated Stochastic Linear Programming

大阪府立大学総合科学部　森田　浩(Hiroshi MORITA)
大阪大学工学部　石井　博昭(Hiroaki ISHII)
大阪大学工学部　西田　俊夫(Toshio NISHIDA)

１．確率計画法

現実社会における意思決定はさまざまの制約や不確実性の下で行わなければならない場合が多く、意思決定に必要な情報が常に確実に手にはいるばかりであるとは限らない。このような不確実性を含んだ問題の解決方法の一つに確率計画法(Stochastic Programming Problem)がある。確率計画法は、数理計画問題に不確実性の表現として確率的変動を取り入れた上で最適化をはかるものである。つまり、最適化問題におけるパラメータおよび係数が確率変数を含むことによって、目的関数や制約条件のもつ確率的変動を表そうとしたものである。

G.Tintner(1955) は農業問題への応用として確率計画法を示し、確率変動する対象の確率分布が既知か未知かで区別した。以後、確率分布が既知である場合が確率計画法として発展していった。A.M.Madansky(1960)は、確率変数の実現する時期によって、確率変数の実現した後でその情報を知ってから決定を行う"wait-and-see"の立場と確率変数の実現値を知る前に決定を行う"here-and-now"の立場の二つを示した。前者は分布問題として発展し、後者は二段階問題となりWalkup & Wets(1967) によりリコースをもつ確率計画問題として特徴づけられた。一方、確率条件の逸脱のとらえ方によると、逸脱の量、程度をペナルティとして与える二段階問題(Two-Stage Programming)と、確率条件を満たさない確率に対して制約をつける機会制約条件計画(Chance Constrained Programming)に分けられ、主としてこれらのモデルが用いられている。

２．不完全情報下での確率計画問題

確率変動する対象の確率分布や実現値などが確実に知られないような不完全情報下での確率計画問題に対しては、情報理論とも関連して、実現値について

の情報を得るこことの価値(Expected Value of Sample Information, EVSI とか Expectet Net Gain of Sampling, ENGS など)について A.Ben-Tal & E. Hochman(1976)や Z.Drezner & G.O.Wesolowsky(1980)らが示している。最近では、未知のパラメータや係数の推定や予測を行った上で最適化を行うことが考えられ、ポートフォリオ理論などへ応用されている。推定、予測の手段としてはＢａｙｅｓ法、回帰分析法、時系列解析法などがよく用いられている。

R.Jagannathan(1985) は確率変数が未知パラメータ θ をもつ確率分布 $F(\cdot|\theta)$ に従うとき、Ｂａｙｅｓの方法によりサンプルを得たときの事後分布を与え、さらに、その情報の価値（ＥＶＳＩ，ＥＮＧＳ，ＥＶＰＩ）を示すとともに最適な標本サイズも示している。

ポートフォリオ分析においては、将来の市場動向の予測推定は欠くことのできないものである。Sharpe(1963)のモデル(single-index model)

$$R_i = \alpha_i + \beta_i I_m + e_i$$

（R_i：証券ｉの収益、I_m： 市場指数）

では、β は各証券の市場に対する影響を表す係数と考えられ、過去のデータにより決められなければならないもので、さまざまの推定の方法が考えられている（たとえば、E.J. Elton & M.J.Gruber (1981)）。直線による回帰分析は最もよく知られた方法であり、これらの係数を定数とみている。時間とともに変化するものとみるならば、時系列モデルが考えられる(Blumeの方法)。また、Ｓｈａｒｐｅのモデルを一般化したモデル(multi-index model)

$$R_i = \alpha_i + \beta_{1i} I_{m_1} + \cdots + \beta_{ni} I_{m_n} + e_i$$

では、重回帰モデルが用いられる。

線形計画問題における係数が多変量時系列で表されている問題を T.Cipra (1987)が考察している。彼は、実現値に基づいて予測しその信頼域を与えるとともに、最適値および最適解の信頼区間および信頼域を与えている。

本稿では、確率的線形計画問題における確率変数の従う分布が未知の場合および線形計画問題での目的関数あるいは制約条件の係数が未知の場合に、推定とそれに伴う確定モデルについて述べる。

3．確率分布が未知の場合(H.Morita et al. (1987))

未知のパラメータをもつ確率分布に従う確率変数を係数に含んだ線形計画問題を考える。パラメータを推定し確率分布にある限定を加える。そして、その中で最悪の状況を与える場合において最適化を計るミニマックス解の考え方を取り入れる。消極的な解ではあるが未知パラメータをもつ問題に対する一つの最適性を表現するであろう。ここでは、次のＬＰ問題において、ｂのみが確率変数（特に、正規分布に従う）であるとする。

$$\text{LP:}\quad \text{Minimize}\quad c'x$$
$$\text{subject to}\quad Ax=b,\ b\sim f(\cdot)\in\mathcal{F}$$

$\mathcal{F}$は正規分布の集合を表し、ｆ（・）は未知パラメータを含んだ正規分布の密度関数を表す。この未知パラメータを推定し、その信頼域によって分布に限定$\mathcal{F}_{\delta}\subseteq\mathcal{F}$を加える。

$$\text{Minimize}\ \underset{f\in\mathcal{F}_{\delta}}{\text{Maximize}}\quad c'x$$
$$\text{subject to}\quad Ax=b$$

その２次リコースモデルは

$$\text{P:}\quad \text{Minimize}\ \underset{f\in\mathcal{F}_{\delta}}{\text{Maximize}}\quad c'x+\int\cdots\int\Sigma d_i(A_ix-t_i)dF(t_1,\cdots,t_m\mid\theta)$$

となる。

正規分布の未知パラメータの平均と分散の信頼領域Ｓは次のようになる。

$$S=\{(\mu_i,\sigma_i^2),i=1,\cdots.m\mid\Sigma(\mu_i-\bar{\mu}_i)/s_i^2\le\frac{m(N-1)}{N(N-m)}F_m^{N-m}(\alpha),$$
$$\frac{(N-1)s_i^2}{\chi_{\beta}^2(N-1)}\le\sigma_i^2\le\frac{(N-1)s_i^2}{\chi_{1-\beta}^2(N-1)},i=1,\cdots,m\}$$

また、このときの限定された正規分布の集合$\mathcal{F}_{\delta}$は次で与える。

$$\mathcal{F}_{\delta}=\{N(\mu,\sigma^2)\mid(\mu,\sigma^2)\in S\}\subseteq\mathcal{F}$$

最悪の状況を考えるとき、分散に関する最大化ではｘに依存しないため無視することができる。平均に関する最悪の状況は以下の問題で示される。

$$\underset{\mu}{\text{Maximize}}\quad L=\Sigma\ d_i(A_ix-\mu_i)^2$$

$$\text{subject to} \qquad \Sigma(\mu_i - \bar{\mu}_i)/s_i^2 \le \frac{m(N-1)}{N(N-m)} F_m^{N-m}(\alpha) \triangleq K$$

Ｌの最大値は実行可能域の境界上でとり、そのとき$(\mu_i^* - \mu_i)$の符号は$A_i x - \mu_i$の符号と反対であること、および、$z_i = (\mu_i - \bar{\mu}_i)^2 / s_i^2$と変数を変換すればＬは凹関数となることから、$\lambda$をラグランジェ乗数とするとき、最適値$z_i^*$は次式で与えられる。

$$z_i^* = d_i^2 s_i^2 (A_i x - \bar{\mu}_i)^2 / (\lambda - d_i s_i^2)^2$$

さらに、λは方程式

$$\sum_{i=1}^{m} d_i^2 s_i^2 (A_i x - \bar{\mu}_i)^2 / (\lambda - d_i s_i^2)^2 = K$$

の最大解であり、$A_i x - \bar{\mu}_i \ne 0$ に対応する $d_i s_i^2$ の最大値（λ_0とおく）よりも大きい。よってこのとき問題Ｐは次のように書き換えられる。

$$\text{P:} \quad \underset{x,\lambda}{\text{Minimize}} \quad c'x + \Sigma\, d_i (A_i x - \bar{\mu}_i)^2 \{\lambda / (\lambda - d_i s_i^2)\}^2$$

$$\text{subject to} \quad \sum_{i=1}^{m} d_i^2 s_i^2 (A_i x - \bar{\mu}_i)^2 / (\lambda - d_i s_i^2)^2 = K, \quad \lambda > \lambda_0$$

明らかにλ_0は、ｘに依存している。また、$\lambda \ge (3/2)\lambda_0$のときＰは凸計画問題になることから、このまま数値計算できる。これ以外のときには凹凸が不定であるためλをいろいろと変えて数値計算する。Ｐは有界な解を与えること、Ｐの解はλに関して連続であることから、この方法で近似的に大域的最適解が得られる。しかしλ_0はｘと独立ではないため以下のような場合分けが必要となる。まず、$d_i s_i^2$ を小さい順に並び変え、最大のものをλ_{max}とおく。$\lambda \ge (3/2)\lambda_{max}$のときはいつも凸計画問題となるので、$\lambda_0 < \lambda < (3/2)\lambda_{max}$の範囲を$\lambda_0$によって場合分けする。ここで、ｐを $A_i x - \bar{\mu}_i \ne 0$ に対応する $d_i s_i^2$ の最大値を与える指数とする。ｐ＝ｍ、すなわち、$\lambda_0 = d_m s_m^2$ のとき、すべてのｉに対して $A_i x - \bar{\mu}_i \ne 0$であり、$\lambda_0 = d_p s_p^2$ $(1 \le p < m)$のとき、$i = p+1, \cdots, m$に対しては$A_i x - \bar{\mu}_i \ne 0$ でなければならない。よって、以下に示すような制約条件をもつｎ個の問題に分割され、その各々の最適解の中で最も良いものが近似解となる。

$m-n \leq p < m$のとき $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} d_i^2 s_i^2 (A_i x - \bar{\mu}_i)^2 / (\lambda - d_i s_i^2)^2 = K$

$A_i x - \bar{\mu}_i \neq 0$、$i = 1, \cdots, p$

$d_p s_p^2 < \lambda \leq d_{p+1} s_{p+1}^2$

$p = m$のとき $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} d_i^2 s_i^2 (A_i x - \bar{\mu}_i)^2 / (\lambda - d_i s_i^2)^2 = K$

$d_m s_m^2 < \lambda \leq (3/2)\lambda_{max}$

この問題の最適解はサンプル数を十分大きくとると、既知のパラメータをもつ問題の最適解に近づいてゆく。

このミニマックス型のモデルをナップザック問題（Pモデル）

Minimize f

subject to $\Pr.(\Sigma c_i x_i \leq f) \geq \alpha$

$\Sigma a_i x_i = b$、 $0 \leq x_i \leq b_i$

ここで、cを正規分布に従う確率変数、に適用したとき、$O(n^2 \log n)$で解けることも示した。(H.Morita, et al. (1988))

4. 目的関数・制約式の推定をする場合

線形の目的関数や制約式の係数が未知あるいは確実に知られていないとき、その推定方法として回帰分析法が良く用いられる。$\beta' x$なる線形式においてβが未知係数であるとき、ある入力xに対して白色雑音εを含んで出力$y = \beta' x + \varepsilon$が観測されるならば、回帰分析によりその最小二乗（LS）推定量は

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1} X'Y$$

で与えられ、正規分布$N(\beta, \sigma^2 (X'X)^{-1})$に従う統計量となる。ここで、$X$は入力データ行列、$Y$は出力ベクトルを表し、サンプル数は$N$としている。

LS推定量$\hat{\beta}$の同時信頼域は

$$(\beta - \hat{\beta})' V^{-1} (\beta - \hat{\beta}) \leq n F_n^{N-n}(\alpha) \qquad (4-1)$$

で表される楕円領域となる。また、回帰直線$\beta' x = \eta$の信頼域は以下に示す上下限をもつ領域として与えられる。

$$\hat{\beta}' x \pm \sqrt{n F_n^{N-n}(\alpha)} \sqrt{x' V x} \qquad (4-2)$$

4．1． 目的関数が未知の場合

線形計画問題

$$\begin{array}{ll} \text{Maximize} & c'x \\ \text{subject to} & Ax = b,\ x \geq 0 \end{array}$$

において、目的関数の係数cが未知の場合(4－1)式によって推定し、最悪の状況での最適化を計るミニマックスモデルを考える。

$$P:\quad \underset{x}{\text{Maximize}}\ \underset{c}{\text{Minimize}}\quad c'x$$
$$\text{subject to}\quad Ax = b,\ x \geq 0,$$
$$(c-\hat{c})'V^{-1}(c-\hat{c}) \leq K$$

これを二段階の問題とみる。xに関する最大化問題はcをパラメータにもつ線形計画問題P1(c)となり、その最適解f(c)は区分的に線形なcの凸関数である。また、cに関する最小化問題P2ではP1(c)の最適解f(c)を最小化することになる。$\tilde{x}^i$をP1(c)の基底可能解とするとき、f(c)は

$$f(c) = \max\,[\,(\tilde{x}^i)'c\,]$$

である。P2の補助問題としてxをパラメータにもつ問題P2(x)

$$P2(x):\quad \underset{c}{\text{Minimize}}\quad x'c$$
$$\text{subject to}\quad (c-\hat{c})'V^{-1}(c-\hat{c}) \leq K$$

を考える。P2(x)の解c^*は

$$c^* = \sqrt{\frac{K}{x'Vx}}\,Vx + \hat{c}$$

となり、P2は唯一つの最適解をもつことから、P1の表現を基底変数と非基底変数に分けたときの最適性の条件により、

Pの最適解x^*

$\Leftrightarrow$ P2(x^*)の解c^*が $(c^*_D)' - (c^*_B)'B^{-1}D \leq 0$ を満たすこと

がわかる。上に示した条件を満たす解が見つかるまで、P1(c)とP2(x)を交互に解く。以下にそのアルゴリズムを示す。

Step 1. cの初期値c^0としてLS推定量$\hat{c}$をとる。k＝0。J＝ϕ。

Step 2. P1(c^k)を解き、その解をx^kとする。$x^k \in J$ならばStep 4.へ、そう

でなければ$J = J + \{x^k\}$としStep 3.へ。

Step 3. $P2(x^k)$を解き、その解をc^{k+1}とする。$k = k + 1$としてStep 2.へ。

Step 4. もし、$x^k = x^{k-1}$ならば、x^kは問題Pの最適解となり、終了。そうでなければ、$f(c) = \max[(x^j)'c; j \in J]$としてP2を解き、その解を$c^{k+1}$とする。$k = k + 1$としてStep 2.へ。

4．2． 制約式が未知の場合

線形計画問題の制約式のうち、一つだけその係数が未知であるような問題を考える。

$$\begin{array}{ll} \text{Maximize} & c'x \\ \text{subject to} & Ax \le b,\ \beta' x = \eta,\ x \ge 0 \end{array}$$

ここで、βが未知の係数であるとし(4－2)式によって推定する。(4－2)式で表される信頼区間を$I(\cdot|x)$と表すならば、$\beta' x = \eta$ を $\eta \in I(\cdot|x)$と置き換えることにする。このとき、この制約式は二つの非線形関数$g_1(x) \ge \eta$と$g_2(x) \ge \eta$ で囲まれた領域を表すことになる。特に、これらは逆凸領域(reverse convex region)を表す。逆凸計画問題の最適解は実行可能域の境界上でとることが知られており、我々の問題においては次のようになる。まず、推定された問題EPとその緩和問題P_0を定義する。

$$\begin{array}{lll} EP: & \text{Maximize} & c'x \\ & \text{subject to} & Ax \le b,\ g_1(x) \ge \eta,\ g_2(x) \ge \eta,\ x \ge 0 \\ P_0: & \text{Maximize} & c'x \\ & \text{subject to} & Ax \le b,\ x \ge 0 \end{array}$$

を定義する。各実行可能域をD，D_0とするとき、P_0の最適解がEPの実行可能解でないときEPの最適解はD_0の稜線と曲面$g_i(x) = \eta$ の交点の中に存在する。よって、Dの凸包が構成できればそれを実行可能域にもつ問題の解が問題EPの最適解になることがわかる。そこで、緩和問題のD_0から出発して順次切除平面を入れることによってDの凸包に近づいてゆく。凸包が構成される以前に最適性を満足する解が見つかれば停止する。k番目の切除平面H_kが入れられたときの問題P_kを

$$P_k: \quad \text{Maximize} \quad c'x \qquad \text{subject to} \quad x \in D_k$$

とし、その最適解をx_kとする。ここで、切除平面H_kは、Dと$x_k \notin D$を分離すること、$\{c'x_k\}$が単調に減少し最適値$c'x_k$に有限回で収束すること、を満足するように決める。D_0の非縮退、有界閉集合および実行可能性などの仮定の下で、その解法アルゴリズムは以下のようになる。

Step 0. $k=0$とする。

Step 1. P_kを解き、その解をx_kとする。$x_k \in D$ならばx_kはEPの最適解となり、終了。そうでなければ、x_kに隣接するD_0の端点を求め、s_k^1, $s_k^2, \ldots, s_k^n$とする。

Step 2. (x_kがD_0の稜線上にあるとき) x_kを頂点としD_0を含む最小の多面錐M_kを作り、その母線と曲面$g_i(x)=\eta$との交点$y_k^j, j=1,\ldots,n$, を求める。すなわち、各jに対して、$y_k^j=\theta_k^j(s_k^j-x_k^j)+x_k$、ただし$\theta_k^j=\min\{\theta \mid g_i(\theta(s_k^j-x_k^j)+x_k) \geq \eta\}$で与えられる。このとき、$y_k^j, j=1,\ldots,n$ を通る超平面を切除平面H_kとする。
(x_kがD_0の稜線上にないとき) x_kとその隣接端点$s_k^j, j=1,\ldots,n$ からできる単体を作り、その底面を切除平面H_kとする。

Step 3. 切除平面H_kを加え、P_{k+1}の実行可能域を$D_{k+1}=D_k \cap H_k^-$ と更新する。$k=k+1$とし、Step 1.へ。

このアルゴリズムによると、超平面H_kがP_kの最適解x_kと実行可能域Dを分離することがわかり、最適解の列$\{x_k\}$の部分列の中で、目的関数の値が狭義に減少するような部分列$\{x_{k_q}^*\}$が存在することが示される。また、$\{c'x_k\}$がEPの最適値$c'x^*$に有限回で収束することは、単調減少部分列の存在、多面体D_0の一つの稜線には非実行可能なx_kは高々1個しか存在しないこと、および稜線上にないx_kは Step 2. において除去されることから、D_0の稜線の数が有限であることによって示される。

最適解に到達する前のP_kの最適解x_kは最適値の上限となるが常にEPの実

行可能解とはならないため、このアルゴリズムを途中で打ち切るときあるいは最適値の下限を求めるためにx_kの実行可能域Dへの射影$\underline{x}_k$を考える。まず、x_kから未知係数βをLS推定量$\hat{\beta}$で置き換えた超平面$\hat{\beta}'x=\eta$へ垂線を下ろし曲面との交点を求める。これは、前出のθと同様に一次探索で見つけられる。この交点における接平面をP_kに制約条件として加え、その解をx_k^1とする。さらによい下限を得るため、前の$\underline{x}_{k-1}$とx_kを結んだ線分と曲面との交点における接平面をP_kの制約条件として加え、その解を$\underline{x}_k^2$とする。この中で最も大きな下限を与えるものを新たな下限$\underline{x}_k$とする。

$$c'\underline{x}_k = \max\,[c'\underline{x}_{k-1},\ c'\underline{x}_k^1,\ c'\underline{x}_k^2]$$

$c'\underline{x}_k \le c'x^* \le c'x_k$であり、$c'x_k \to c'x^*$のとき$c'\underline{x}_k \to c'x^*$となることがわかる。

5．今後の課題

ここに示したモデルはサンプリングが終了した後に定式化しているもので、途中でサンプルが追加されたときには最初から定式化しなければならない。そこで、サンプリングとともに決定が下されるような逐次的な手法（確率近似法、確率的劣勾配を用いた方法など）の開発も必要となる。

参考文献

Ben-Tal,A. & E.Hochman(1976):"Stochastic Programs with Incomplete Information," Ope. Res., vol.24, 335-343.

Charnes,A. & W.W.Cooper(1959):"Chance Constrained Programming," Man. Sci., vol.6, 73-79.

Cipra,T.(1987):"Prediction in Stochastic Linear Programming," Kybernetika, vol.23, 214-226.

Drezner,Z. & G.O.Wesolowsky(1980):"The Expected Value of Perfect Information in Facility Location," Ope. Res., vol.28, 395-402.

Eiton,J.E. & M.J.Gruber(1987),Modern Portfolio Theory and Investment Analysis, 3rd ed., John-Wiley & Sons.

Ishii,H. & T.Nishida(1982):"Stochastic Linear Knapsack Problem," Tech. Rep. of Osaka Univ., vol.32, 25-30.

Jagannathan,R.(1983):"Use of sample Information in Stochastic Recourse and Chance-constrained Programming Model," Econ., vol.31, 181-196.

Hillestad,R.J. & S.E.Jacobsen(1980):"Reverse Convex Programming," Applied Mathematics and Optimization, vol.6, 257-269.

Madansky,A.M.(1960):"Inequalities for Stochastic Linear Programming Problem," Man. Sci., vol.6, 197-204.

Morita,H.,H.Ishii & T.Nishida(1987):"Confidence Region Method for a Stochastic Programming Problem," J. of Ope. Res. Soc. of Jap., vol.30, 218-230.

-----,----- & -----(1988):"Confidence Region Method for a Stochastic Linear Knapsack Programming Problem," Math. Jap.,vol.33, 559-564.

-----,----- & -----:"Stochastic Programming with Estimated Objective," Tech. Rep. of Osaka Univ., vol.39 (to appear)

-----,----- & -----:"Stochastic Linear Programming Problem with Partially Estimated Constraint," (to be submitted)

Sharpe,W.F.(1963):"A Simplified Model for Portfolio Analysis," Man. Sci., vol.9, 227-293.

Tintner,G.(1963):"Stochastic Linear Programming with Applications to Agricultural Economics," Proc. of 2nd Symp. in LP, 197-228.

Tuy,H.(1987):"Convex Programs with an Additional Reverse Convex Constraint," J. of Opt. The. and App., vol.52, 463-485.

Walkup,D.W. & R.J.B.Wets(1967):"Stochastic Programming with Recourse," SIAM J. on App. Math., vol.15, 1299-1314.